

全国各类成人高等学校招生考试

专科起点升本科

高等数学(二)全真模拟试卷(六)

(考试时间 120 分钟)

题 号	一	二	三	总 分	
题 分	40	40	70	统分人	
得 分				核分人	

得 分	阅卷人	核分人

一、选择题(在每题给出的四个选项中只有一项符合题目要求, 每题 4 分, 共 40 分.)

1. 设函数 $f(x) = \begin{cases} 1 & x \neq 1 \\ 0 & x = 1 \end{cases}$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$ 【 】

- A. 0
B. 1
C. ∞
D. 不确定

2. 曲线 $y = 2 \ln \frac{x^2 + 3x + 1}{x^2} - 4$ 的水平渐近线是 【 】

- A. $y = -4$
B. $y = -2$
C. $y = 1$
D. $x = -4$

3. $\int_1^{+\infty} x^{-\frac{4}{3}} dx =$ 【 】

- A. -4
B. 4
C. -3
D. 3

4. 设 $z = 3x^2 - xy + 2y^2$, 则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} =$ 【 】

- A. 6
B. -1
C. 3
D. 2

5. 从一副 52 张的扑克牌中, 任意抽 5 张, 其中没有 A 字牌的概率为 【 】

- A. $\frac{48}{52}$
B. $\frac{C_{48}^5}{C_{52}^5}$

C. $\frac{C_{48}^5}{52}$

D. $\frac{48^5}{52^8}$

6. 设 $f(x) = \frac{1}{1-x}$, 则 $f[f(-1)] =$

A. 2

B. -1

C. 1

D. ∞

7. 下列各极限中, 正确的是

A. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 - \frac{1}{x})^x = e$

B. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

C. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1+ax)^{\frac{1}{x}} = e$

D. $\lim_{x \rightarrow \infty} (1 + \frac{a}{x})^{bx+d} = e^{ab}$

8. 设 $f(x)$ 在 x_0 处可导, 且 $f'(x_0) \neq 0$, 存在 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{f(x_0 - 2x) - f(x_0)} = \frac{1}{4}$, 则 $f'(x_0) =$

A. 4

B. -4

C. 2

D. -2

9. 已知 $f(x+5) = 2 + 3e^{2x}$, 则 $f'(x) =$

A. $2 + e^{2x}$

B. $3e^{2x}$

C. $3e^{-10}e^{2x}$

D. $6e^{-10}e^{2x}$

10. $\int \tan^2 x dx =$

A. $\tan x + x + C$

B. $\tan x - x + C$

C. $\sec^2 x + C$

D. $-\csc^2 x + C$

得分	阅卷人	核分人

二、填空题(将答案填在横线上. 每题 4 分, 共 40 分.)

11. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x}{2x} =$

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} \cos 2x & x > 0 \\ a + x^2 & x \leq 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续, 则 $a =$

13. $\lim_{x \rightarrow 0} (x \sin \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \sin x) =$

14. 设函数 $y = \ln \cos x$, 则 $y' =$

15. 已知 $y = x^{\cos x} (x > 0)$, 则 $y'|_{x=\pi} =$

16. 设函数 $y = x^n$, 则 $y^{(n)} =$

17. $\int \frac{1}{1+e^x} dx =$

18. $\int_{-2}^2 (x + \sqrt{4-x^2})^2 dx = \underline{\hspace{2cm}}.$

19. 设 $z = e^{\sin x} \cos y$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

20. 设 $z = x^3 + xy$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} = \underline{\hspace{2cm}}.$

得 分	阅卷人	核分人

三、解答题(应写出推理演算步骤. 共 70 分.)

21. (本题满分 8 分)

已知 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + 5b}{x - 3} = 10$, 求常数 a, b 的值.

22. (本题满分 8 分)

求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^3 x}$

23. (本题满分 8 分)

设 $y = \frac{1}{2} e^x \arcsin x$, 求 y' .

24. (本题满分 8 分)

求 $\int \sin^3 x dx$.

25. (本题满分 8 分)

设离散型随机变量 ξ 的概率分布为

ξ	-2	-1	0	1	2	3
P	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{1}{4}$	c

求 (i) c 的值;

(ii) 期望值 $E(\xi)$.

26. (本题满分 10 分)

求由直线 $y=0, x=e$ 及曲线 $y=\ln x$ 所围成平面图形的面积.

27. (本题满分 10 分)

求曲线 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的凹凸区间和拐点.

28. (本题满分 10 分)

求证: 方程 $x - \frac{1}{2} \sin x = 0$ 只有一个根.

令 $y'' = \frac{2(1-x)(1+x)}{(1+x^2)^2} = 0$ 得 $x = \pm 1$

列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 0)$	0	$(0, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	-		-		+		+
y''	-		+		+		-
y	↓	$\ln 2$	↘	0	↑	$\ln 2$	↑

∴ 函数增区间为 $(0, +\infty)$, 减区间为 $(-\infty, 0)$

凹区间为 $(-1, 1)$, 凸区间为 $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$

极小值点为 $(0, 0)$

拐点为 $(-1, \ln 2)$ 与 $(1, \ln 2)$

28. 解: 设横断面的底边长 $x \text{ cm}$, 高 $\sqrt{30^2 - x^2} \text{ cm}$, 面积为 y .

$$y = x\sqrt{30^2 - x^2}$$

$$\text{令 } y' = \sqrt{30^2 - x^2} + x \frac{-2x}{2\sqrt{30^2 - x^2}} = \frac{30^2 - 2x^2}{\sqrt{30^2 - x^2}} = 0$$

$$\text{得 } x = 15\sqrt{2}, \sqrt{30^2 - x^2} = 15\sqrt{2}$$

即 $x = 15\sqrt{2}$ 时 y 最大

∴ 当矩形横断面的底边和高均为 $15\sqrt{2} \text{ cm}$ 时, 面积最大.

高等数学(二)全真模拟试卷(六)参考答案

一、选择题

1. B 2. A 3. D 4. B 5. B 6. A 7. D 8. D 9. D 10. B

二、填空题

11. $\frac{3}{2}$

12. 1

13. 1

14. $-\tan x$

15. $-\frac{1}{\pi^2}$

16. $n!$

17. $x - \ln(1 + e^x) + C$

18. 16

19. $e^{\sin x} \cos x \cos y$

20. $3x^2 + y - x$

三、解答题

21. 解: $\because \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + 5b}{x - 3} = 10, \lim_{x \rightarrow 3} (x - 3) = 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} (2x^2 + ax + 5b) = 18 + 3a + 5b = 0$

$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 + ax + 5b}{x - 3} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x + a}{1} = 12 + a = 10$

$\therefore a = -2, b = -\frac{12}{5}$

22. 解: $\because \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^3 x}{x^3} = 1$

$\therefore \text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - \cos x + x \sin x}{3x^2}$

$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{3x}$

$= \frac{1}{3}$

23. 解: $y' = \frac{1}{2} e^x \arcsin x + \frac{1}{2} e^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= \frac{1}{2} e^x \left(\arcsin x + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \right)$

24. 解: 原式 $= \int \sin^2 x \sin x dx$

$= - \int (1 - \cos^2 x) d(\cos x)$

$= -\cos x + \frac{1}{3} \cos^3 x + C$

25. 解: (i) $c = 1 - \left(\frac{1}{10} + \frac{1}{5} + \frac{1}{4} + \frac{3}{20} + \frac{1}{4} \right)$

$= 1 - \frac{19}{20}$

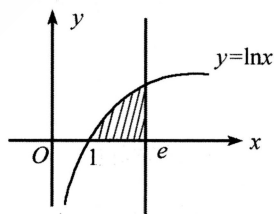
$= \frac{1}{20}$

(ii) $E(X) = \frac{1}{10} \times (-2) + \frac{1}{5} \times (-1) + \frac{1}{4} \times 0 + \frac{3}{20} \times 1 +$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4} \times 2 + \frac{1}{20} \times 3 \\ &= \frac{2}{5} \end{aligned}$$

26. 解: 如图

$$\begin{aligned} S &= \int_1^e \ln x \, dx \\ &= x \cdot \ln x \Big|_1^e - \int_1^e x \, d \ln x \\ &= e - \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} \, dx \\ &= e - x \Big|_1^e \\ &= e - e + 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$



27. 解: 函数 $y = x^4 - 2x^3 + 1$ 的定义域为 $(-\infty, +\infty)$

$$y' = 4x^3 - 6x^2$$

$$y'' = 12x^2 - 12x$$

$$= 12x(x - 1)$$

令 $y'' = 0$, 得 $x = 0, x = 1$

当 $x < 0$ 时, $y'' > 0$, $(-\infty, 0)$ 为凹区间.

当 $0 < x < 1$ 时, $y'' < 0$, $(0, 1)$ 为凸区间.

当 $x > 1$ 时, $y'' > 0$, $(1, +\infty)$ 为凹区间.

又知 $x = 0$ 时, $y = 1$; $x = 1$ 时, $y = 0$

$\therefore$ 拐点为 $(0, 1), (1, 0)$

28. 证明: 设 $f(x) = x - \frac{1}{2} \sin x$

$$\because f'(x) = 1 - \frac{1}{2} \cos x > 0$$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调上升

$\therefore f(x) = 0$ 至多有一个根

又 $f(0) = 0$

$\therefore f(x) = 0$ 即 $x - \frac{1}{2} \sin x = 0$ 只有一个根.