

全国各类成人高等学校招生考试

专科起点升本科

高等数学(一)全真模拟试卷(七)

(考试时间 120 分钟)

题 号	一	二	三	总 分	
题 分	40	40	70	统分人	
得 分				核分人	

得 分	阅卷人	核分人

一、选择题(在每题给出的四个选项中只有一项符合题目要求, 每题 4 分, 共 40 分。)

1. 已知 $\int f(x^2)dx = e^x + C$, 则 $f(x) =$ 【 】

A. $\frac{1}{2}e^x$

B. $e^{\sqrt{x}}$

C. $\frac{1}{2}e^{\sqrt{x}}$

D. e^{x^2}

2. 若 x_0 为 $f(x)$ 的极值点, 则 【 】

A. $f'(x_0)$ 必定存在, 且 $f'(x_0) = 0$

B. $f'(x_0)$ 必定存在, 但 $f'(x_0)$ 不一定等于零

C. $f'(x_0)$ 不存在, 或 $f'(x_0) = 0$

D. $f'(x_0)$ 必定不存在

3. 方程 $x^2 + y^2 - z = 0$ 表示的二次曲面是 【 】

A. 椭圆面

B. 圆锥面

C. 旋转抛物面

D. 圆柱面

4. 设 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$, 则 $y' =$ 【 】

A. $\frac{ay - x^2}{ax - y^2}$

B. $\frac{ay - x^2}{y^2 - ax}$

C. $\frac{y^2 - ax}{ay - x^2}$

D. $\frac{ax - y^2}{ay - x^2}$

5. 方程 $y'' + 6y' + 9y = xe^{-3x}$ 的一个特解形式为 【 】

A. $y^* = C_1 e^{-3x}$

B. $y^* = x(Ax + B)e^{-3x}$

C. $y^* = (Ax + B)e^{-3x}$

D. $y^* = x^2(Ax + B)e^{-3x}$

6. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$, 则 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处

【 】

A. 不连续

B. 连续但不可导

C. 可导且 $f'(0)=0$

D. 可导且 $f'(0)=1$

7. 设 $f(x)=1-x, g(x)=\ln(2-x)$, 则当 $x \rightarrow 1$ 时

【 】

A. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 高阶的无穷小

B. $f(x)$ 是比 $g(x)$ 低阶的无穷小

C. $f(x)$ 与 $g(x)$ 同阶但不等价

D. $f(x)$ 与 $g(x)$ 为等价无穷小

8. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-2x)}{\sin x} =$

【 】

A. -1

B. 1

C. 0

D. -2

9. 设 $y=2^{-x}$, 则 $y' =$

【 】

A. 2^{-x}

B. -2^{-x}

C. $2^{-x} \ln 2$

D. $-2^{-x} \ln 2$

10. 设 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\int_0^1 f'(2x) dx =$

【 】

A. $f(2)-f(0)$

B. $\frac{1}{2}[f(1)-f(0)]$

C. $\frac{1}{2}[f(2)-f(0)]$

D. $f(1)-f(0)$

得 分	阅卷人	核分人

二、填空题(将答案填在横线上. 每题 4 分, 共 40 分.)

11. 曲线 $y = \frac{x^2}{x+1}$ 的铅直渐近线方程是_____.

12. 若 $\int_0^b e^{2x} dx = 1$, 则 $b =$ _____.

13. 设 $f'(3x-1) = e^x$, 则 $f(x) =$ _____.

14. 若广义积分 $\int_0^{+\infty} e^{-kx} dx = 1$, 其中 k 为常数, 则 $k =$ _____.

15. 已知 $f(x) \leq 0$, 且 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 则由曲线 $y=f(x)$, 直线 $x=a, x=b$ 及 x 轴所围成图形的面积为_____.

16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin(1+x^2)} =$ _____.

17. 函数 $f(x, y) = e^{x-y}(x^2 - 2y^2)$ 的极值点是_____.

18. 设 $z = \ln(x-y)$, 则 $dz =$ _____.

19. 函数 $\frac{1}{3-x}$ 在 $(-3, 3)$ 内展开为 x 的幂级数为_____.

20. 方程 $y' + xy = xe^{-x^2}$ 的通解为_____.

得 分	阅卷人	核分人

三、解答题(应写出推理演算步骤, 共 70 分.)

21. (本题满分 8 分)

求 $\int_0^{\pi} \sqrt{1+\cos x} \, dx$.

22. (本题满分 8 分)

设 $z = \arctan \frac{y}{x}$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

23. (本题满分 8 分)

求 $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2+2x+2}$.

24. (本题满分 8 分)

求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (x-1)^n}{n+1}$ 的收敛区间.

25. (本题满分 8 分)

求 $\iint_D (2x+y) dx dy$, 其中 D 为 $x=0, y=0, x+y=3$ 围成的平面区域.

26. (本题满分 10 分)

求微分方程 $xy' + y = \sin x$ 的通解.

27. (本题满分 10 分)

求曲线 $y = \sin x, y = \cos x (0 \leq x \leq \frac{\pi}{4})$ 与 $x = 0$ 所围成的平面图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

28. (本题满分 10 分)

已知 $y = 2x \arctan \frac{y}{x}$, 求 y'' .

高等数学(一) 全真模拟试卷(七) 参考答案

一、选择题

1. B 2. C 3. C 4. B 5. D 6. C 7. D 8. D 9. D 10. C

二、填空题

11. $x = -1$

12. $\frac{1}{2} \ln 3$

13. $3e^{\frac{1}{3}(x+1)} + C$

14. 1

15. $\int_a^b |f(x)| dx$

16. 0

17. $(-4, -2)$

18. $\frac{1}{x-y} dx - \frac{1}{x-y} dy$

$$19. \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^{n+1}}$$

$$20. y = Ce^{-\frac{1}{2}x^2} - e^{-x^2}$$

三、解答题

$$\begin{aligned} 21. \text{解: 原式} &= \int_0^{\pi} \sqrt{2\cos^2 \frac{x}{2}} dx = \int_0^{\pi} \sqrt{2} \cdot \left| \cos \frac{x}{2} \right| dx \\ &= \sqrt{2} \int_0^{\pi} \cos \frac{x}{2} dx = 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2} \Big|_0^{\pi} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 22. \text{解: } \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{x^2 + y^2} \\ \therefore \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= -\frac{(x^2 + y^2) - y \cdot 2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 23. \text{解: } \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} &= \int_0^{+\infty} \frac{d(x+1)}{1 + (x+1)^2} \\ &= \arctan(x+1) \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 24. \text{解: } \because \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left| \frac{(-1)^{n+1}}{n+2} \right|}{\left| \frac{(-1)^n}{n+1} \right|} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} \\ &= 1 \end{aligned}$$

∴ 当 $|x-1| < 1$ 时, 即 $x \in (0, 2)$ 时, 幂级数收敛

∴ 所求收敛区间为 $(0, 2)$

$$25. \text{解: } D \text{ 可表示为 } 0 \leq x \leq 3, 0 \leq y \leq 3-x$$

$$\begin{aligned} \text{则 } \iint_D (2x+y) dx dy &= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} (2x+y) dy \\ &= \int_0^3 \left(2xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_0^{3-x} dx \\ &= \int_0^3 \left[2x(3-x) + \frac{(3-x)^2}{2} \right] dx \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= 2 \int_0^3 (3x - x^2) dx + \frac{1}{2} \int_0^3 (3-x)^2 dx \\
 &= 2 \left(\frac{3}{2} x^2 - \frac{1}{3} x^3 \right) \Big|_0^3 - \frac{1}{6} (3-x)^3 \Big|_0^3 \\
 &= \frac{27}{2}
 \end{aligned}$$

26. 解: 方程变形为 $y' + \frac{1}{x}y = \frac{\sin x}{x}$

$$\begin{aligned}
 \text{利用公式 } y &= e^{-\int \frac{1}{x} dx} \left(\int \frac{\sin x}{x} e^{\int \frac{1}{x} dx} dx + C \right) \\
 &= \frac{1}{x} \left(\int \frac{\sin x}{x} \cdot x dx + C \right) \\
 &= \frac{1}{x} (-\cos x + C)
 \end{aligned}$$

27. 解: $y = \sin x$ 与 $y = \cos x$ 的交点为 $(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}}{2})$

$$\begin{aligned}
 V_x &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\cos^2 x - \sin^2 x) dx \\
 &= \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx \\
 &= \frac{1}{2} \pi \sin 2x \Big|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{2}
 \end{aligned}$$

28. 解: $y' = 2 \arctan \frac{y}{x} + 2x \cdot \frac{x^2}{x^2 + y^2} \cdot \frac{xy' - y}{x^2}$

$$= \frac{y}{x} + \frac{2x}{x^2 + y^2} (xy' - y)$$

$$\text{移项得 } y' \left(1 - \frac{2x^2}{x^2 + y^2} \right) = \frac{y}{x} - \frac{2xy}{x^2 + y^2}$$

$$\therefore y' = \frac{y}{x}$$

$$\text{两边对 } x \text{ 求导得 } y'' = \frac{xy' - y}{x^2} = \frac{x \cdot \frac{y}{x} - y}{x^2} = 0$$