全国各类成人高等学校招生考试

专科起点升本科

高等数学(一)全真模拟试卷(六)

(考试时间 120 分钟)

题　号	一	二	三	总　分	
题　分	40	40	70	统分人	
得　分				核分人	

得　分	阅卷人	核分人

一、选择题(在每题给出的四个选项中只有一项符合题目要求.每题 4 分,共 40 分.)

1. $\int_0^1 xe^{x^2}\mathrm{d}x=$ 【　　】

A. $\frac{1}{2}(e-1)$　　B. $\frac{1}{2}(e+1)$

C. $e-1$　　D. $e+1$

2. 设 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=e^{2x}-1$,其中 $f(x)$为连续函数,则 $f(x)=$ 【　　】

A. $-e^{2x}$　　B. e^{2x}

C. $-2e^{2x}$　　D. $2e^{2x}$

3. 微分方程 $y''+3y'+2y=e^{-x}$,利用待定系数法求其特解 y^* 时,下面特解设法正确的是 【　　】

A. $y^*=Ae^{-x}$　　B. $y^*=(Ax+B)e^{-x}$

C. $y^*=Axe^{-x}$　　D. $y^*=Ax^2e^{-x}$

4. 方程 $\frac{x^2+y^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=0$ 表示的曲面是 【　　】

A. 椭圆面　　B. 抛物面

C. 圆柱面　　D. 圆锥面

5. 已知二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{d}\sigma=1$,则区域 D 为 【　　】

A. $0\leqslant x\leqslant\frac{1}{2},0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}$

B. $-1\leqslant x\leqslant 1,-1\leqslant y\leqslant 1$

C. $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant x$

D. $0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1$

6. 当 $x\to 0$ 时,$5x^2+3x$ 是 x 的 【 】

A. 高阶无穷小

B. 等价无穷小

C. 同阶无穷小,但不是等价无穷小

D. 低阶无穷小

7. 如果 $\lim\limits_{x\to\infty} kx\sin\frac{3}{x}=1$,则 $k=$ 【 】

A. $\frac{1}{3}$

B. 1

C. 3

D. $\frac{1}{2}$

8. 设函数 $f(x)$在区间$[0,4]$上可导,$f'(x)>0$,则 【 】

A. $f(4)>f(0)$

B. $f(4)<f(0)$

C. $f(4)=f(0)$

D. $f(4)$与 $f(0)$无法比较

9. 设 $y=xe^{-x}$,则 $y'=$ 【 】

A. $-e^{-x}$

B. $e^{-x}(1-x)$

C. $-xe^{-x}$

D. $e^{-x}(1+x)$

10. 设 a 为常数,且$\int_0^1(2x+a)\mathrm{d}x=3$,则 $a=$ 【 】

A. 1

B. 2

C. -1

D. -2

得 分	阅卷人	核分人

二、填空题(将答案填在横线上. 每题 4 分,共 40 分.)

11. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x+e^{-x}-2}{x}=$________.

12. 设 $f(x)=x^2$,则 $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=$________.

13. 设 $y=\arctan\frac{1+x}{1-x}$,则 $y'=$________.

14. 曲线 $y=1+\frac{x}{(x-2)^2}$的水平渐近线方程是________.

15. $\int_{-1}^{1}\frac{x\sin^2 x}{1+x^2}\mathrm{d}x=$________.

16. $\int\frac{1}{1+\sin x}\mathrm{d}x=$________.

17. 设 $f(x)$的一个原函数是 x^2,则$\int xf(1-x^2)\mathrm{d}x=$________.

18. 设 $z=(x+2y)^x$,则$\frac{\partial z}{\partial y}=$__________.

19. 微分方程 $xy'=y+2$ 的通解是________.

20. 方程 $y''+y'+y=2xe^{-x}$ 的特解可设为 $y^*=$________.

得 分	阅卷人	核分人

三、解答题(应写出推理演算步骤.共 70 分.)

21.(本题满分 8 分)

已知 $y=x\arcsin x+\ln\sqrt{\frac{2x-1}{x+1}}$,求 y'.

22.(本题满分 8 分)

求不定积分$\int\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}\mathrm{d}x$.

23.(本题满分 8 分)

设 $z=\arccos\sqrt{\frac{x}{y}}$,求$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}$.

24.(本题满分 8 分)

求解微分方程 $\begin{cases} y'-y\tan x=\sec x \\ y|_{x=0}=0 \end{cases}$

25.(本题满分 8 分)

将函数 $f(x)=e^{-x}$ 展开成关于$(x-1)$的幂级数,并写明收敛区间.

26.(本题满分 10 分)

求二重积分$\iint\limits_D(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 是由 $x=0,y=0,x+y=1$ 围成的平面图形.

27.（本题满分 10 分）

若$\int_{a}^{2\ln 2}\frac{e^{t}\,\mathrm{d}t}{\sqrt{e^{t}+1}}=2(\sqrt{5}-\sqrt{3})$，求 a.

28.（本题满分 10 分）

已知有一半圆形薄板，其上任一点的面密度与该点到圆心的距离成正比，求此薄板的质量.

高等数学(一)全真模拟试卷(六)参考答案

一、选择题

1. A　2. D　3. C　4. D　5. D　6. C　7. A　8. A　9. B　10. B

二、填空题

11. 0

12. 4

13. $\dfrac{1}{1+x^2}$

14. $y=1$

15. 0

16. $\tan x-\sec x+C$

17. $-\dfrac{1}{2}(1-x^2)^2+C$

18. $2x(x+2y)^{x-1}$

19. $y=Cx-2$

20. $(Ax+B)e^{-x}$

三、解答题

21. **解:** $y'=\arcsin x+\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\left(\dfrac{1}{2}\ln\dfrac{2x-1}{x+1}\right)'$

$$=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2}\left(\frac{2}{2x-1}-\frac{1}{x+1}\right)$$

$$=\arcsin x+\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{2x-1}-\frac{1}{2(x+1)}$$

22. **解:** 令 $x=\sec t$, $dx=\sec t\cdot\tan t\ dt$

$$\int\frac{1}{\sqrt{(x^2-1)^3}}dx=\int\frac{1}{\tan^3 t}\cdot\sec t\cdot\tan t\ dt$$

$$=\int\frac{\sec t}{\tan^2 t}dt$$

$$=\int\frac{\cos t}{\sin^2 t}dt$$

$$=-\frac{1}{\sin t}+C$$

$$=-\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}+C$$

23. **解**:$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x}{y}}}\cdot\frac{1}{\sqrt{y}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$=\frac{1}{2\sqrt{x}\sqrt{y-x}}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{(y-x)^3}}$$

$$=\frac{1}{4\sqrt{x(y-x)^3}}$$

24. **解**:代入公式得:

$$y=e^{\int\tan x\,dx}\left(\int e^{-\int\tan x\,dx}\sec x\,dx+C\right)$$

$$=\frac{x+C}{\cos x}$$

将 $y\Big|_{x=0}=0$ 代入得 $C=0$

$$\therefore y=\frac{x}{\cos x}$$

25. **解**:$e^{-x}=e^{-1}e^{1-x}$

$$\because e^t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\quad(-\infty<t<+\infty)$$

$$\therefore e^{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

$$\therefore e^{-x}=\frac{1}{e}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-1)^n}{n!}\quad(-\infty<x<+\infty)$$

26. **解**:D 可表示为

$$0\leqslant y\leqslant 1-x,0\leqslant x\leqslant 1$$

$$\therefore\iint_D(1-x-y)\,dx\,dy=\int_0^1 dx\int_0^{1-x}(1-x-y)\,dy$$

$$=\int_0^1\left[(1-x)^2-\frac{y^2}{2}\Big|_0^{1-x}\right]dx$$

$$=\int_0^1\frac{(1-x)^2}{2}\,dx$$

$$=-\frac{1}{6}(1-x)^3\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{6}$$

27. **解**:令 $e^t+1=u^2$,则 $t=\ln(u^2-1)$,$\mathrm{d}t=\frac{2u}{u^2-1}\mathrm{d}u$

$$\int_a^{2\ln2}\frac{e^t\mathrm{d}t}{\sqrt{e^t+1}}=\int_{\sqrt{e^a+1}}^{\sqrt{5}}\frac{u^2-1}{u}\cdot\frac{2u}{u^2-1}\mathrm{d}u$$

$$=2(\sqrt{5}-\sqrt{e^a+1})$$

又知 $2(\sqrt{5}-\sqrt{e^a+1})=2(\sqrt{5}-\sqrt{3})$

$\therefore\ a=\ln2$

28. **解**:面密度 $\rho(x,y)$ 为 $\rho(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}$,半圆半径为 a

质量 $M=\iint\limits_D\rho(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

用极坐标来计算:$0\leqslant\theta\leqslant\pi$,$0\leqslant r\leqslant a$

$\therefore\ M=\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^a kr\cdot r\mathrm{d}r=\frac{1}{3}k\pi a^3$