全国各类成人高等学校招生考试

专科起点升本科

高等数学(一)全真模拟试卷(三)

(考试时间 120 分钟)

题　号	一	二	三	总　分	
题　分	40	40	70	统分人	
得　分				核分人	

得 分	阅卷人	核分人

一、选择题(在每题给出的四个选项中只有一项符合题目要求.每题 4 分,共 40 分.)

1. 设 $f(x)=x^3+x+1$,则 $\int_{-2}^{2} f(x)\mathrm{d}x=$ 【　】

A. 4　　B. 0

C. $\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$　　D. $2\int_0^2 f(x)\mathrm{d}x$

2. 已知 $f(x)=\int_0^x \ln(1+t)\mathrm{d}t$,则 $f''(x)=$ 【　】

A. $\ln(1+x)$　　B. $\ln x$

C. $\dfrac{1}{1+x}$　　D. $\dfrac{1}{x}$

3. $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^{x^2}\sqrt{1+t^2}\,\mathrm{d}t=$ 【　】

A. $\sqrt{1+x^2}$　　B. $\sqrt{1+x^4}$

C. $2x\sqrt{1+x^4}$　　D. $2x\sqrt{1+x^2}$

4. 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 发散,则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 【　】

A. 收敛　　B. 条件收敛

C. 发散　　D. 可能收敛也可能发散

5. $y''+y'-2y=0$ 的通解是 $y=$ 【　】

A. $C_1e^{-2x}+C_2$

B. $C_1e^{-2x}+C_2e^{-x}$

C. $C_1e^{-2x}+C_2e^{x}$

D. $e^{-2x}+e^{x}$

6. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+x}{2-x}\right)^{\frac{1}{x}}=$ 【 】

A. e

B. $e^{\frac{1}{2}}$

C. e^2

D. $e^{-\frac{1}{2}}$

7. 已知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$存在,则 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=$ 【 】

A. $f'(x)$

B. $f'(0)$

C. $f(0)$

D. $\dfrac{1}{2}f'(0)$

8. 设函数 $f(x)=\begin{cases}\sqrt[x]{1+2x} & x\neq 0\\ k & x=0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续,则 $k=$ 【 】

A. e^2

B. e^{-2}

C. 1

D. 0

9. 函数 $y=\ln(1+x^2)$的单调减区间是 【 】

A. $(-5,5)$

B. $(-\infty,0)$

C. $(0,+\infty)$

D. $(-\infty,+\infty)$

10. 设 $f'(x)$在点 x_0 的某邻域内存在,且 $f(x_0)$为 $f(x)$的极大值,则

$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+2h)-f(x_0)}{h}=$ 【 】

A. 2

B. 1

C. 0

D. -2

得 分	阅卷人	核分人

二、填空题(将答案填在横线上.每题 4 分,共 40 分.)

11. 设函数 $f(x)$有连续的二阶导数且 $f(0)=0,f'(0)=1,f''(0)=-2$,则

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-x}{x^2}=$__________.

12. 当 $x=1$ 时,$f(x)=x^3+3px+q$ 取极值(q 为常数),则 $p=$__________.

13. 设曲线 $y=\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}$,则该曲线的铅直渐近线为__________.

14. $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{x\cdot\sin^2 x}{1+x^2}\,dx=$__________.

15. $\int e^{2x^2+\ln x}\,dx=$______________.

16. $\int \frac{1}{x^2+2x+5}\,dx=$______________.

17. 已知$\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$,则$\int_0^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}\,dx=$__________.

18. 设$z=\sqrt{x^2+y^2}$,则$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=$__________.

19. 级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^p(n+1)}}$收敛,则$p$的范围是__________.

20. 方程$y'-\frac{1}{x}y=-\ln x$的通解$y=$______________.

得 分	阅卷人	核分人

三、解答题(应写出推理演算步骤.共70分.)

21.(本题满分8分)

已知点(1,3)为曲线$y=x^3+ax^2+bx+14$的拐点,求a、b的值.

22.(本题满分8分)

已知$\int_0^y e^{t^2}\,dt=\int_0^{x^2}\cos t\,dt+\cos y^2$确定$y$是$x$的函数,求$dy$.

23.（本题满分 8 分）

已知 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & x\geqslant 0\\ \dfrac{1}{e^{x}} & x<0\end{cases}$，求 $\int_{-2}^{2} f(x-1)\,\mathrm{d}x$.

24.（本题满分 8 分）

求 $\int \dfrac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^{x}}\,\mathrm{d}x$.

25.（本题满分 8 分）

将 $f(x)=\dfrac{1}{x-a}\ (a>0)$ 展开为 $(x-b)$ 的幂级数 $(b\neq a)$.

26.(本题满分 10 分)

求 $\iint\limits_{D}(xe^{y}+x^{2}y^{2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 D 由 $y=x^{2}$,$y=4x^{2}$,$y=1$ 围成.

27.(本题满分 10 分)

求方程 $y''-6y'+9y=(x+1)e^{3x}$ 的通解.

28.(本题满分 10 分)

设 $z=xy+xe^{\frac{y}{x}}$,求证:$x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=xy+z$.

高等数学(一)全真模拟试卷(三)参考答案

一、选择题

1.A　2.C　3.C　4.D　5.C　6.A　7.B　8.A　9.B　10.C

二、填空题

11. -1

12. -1

13. $x=0$

14. 0

15. $\frac{1}{4}e^{2x^2}+C$

16. $\frac{1}{2}\arctan\frac{x+1}{2}+C$

17. $\sqrt{\pi}$

18. $\frac{1}{z}$

19. $p>1$

20. $x[-\frac{1}{2}(\ln x)^2+C]$

三、解答题

21. **解**:点(1,3)在曲线上,则

$3=1+a+b+14$ 即 $a+b=-12$

$y'=3x^2+2ax+b, y''=6x+2a$

(1,3)为拐点则 $y''|_{x=1}=0$,即 $6+2a=0, a=-3$

将 $a=-3$ 代入 $a+b=-12$ 得 $b=-9$

22. **解**:两边对 x 求导

$e^{y^2}\cdot y'=\cos x^2\cdot 2x-\sin y^2\cdot 2yy'$

$$\therefore y'=\frac{2x\cos x^2}{e^{y^2}+2y\cdot\sin y^2}$$

$$\therefore dy=\frac{2x\cos x^2}{e^{y^2}+2y\cdot\sin y^2}dx$$

23. **解**:由题知 $f(x-1)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x\geqslant 1\\ \frac{1}{e^{x-1}} & x<1\end{cases}$

$$\int_{-2}^{2}f(x-1)dx=\int_{-2}^{1}e^{1-x}dx+\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx=\int_{-2}^{1}-e^{1-x}d(1-x)+\int_{1}^{2}\frac{1}{x}dx$$

$$=-e^{1-x}\Big|_{-2}^{1}+\ln x\Big|_{1}^{2}=e^3-1+\ln 2$$

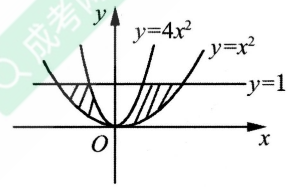
24. **解**:原式 $=\int\frac{2^{x+1}-5^{x+1}}{(2\times 5)^x}dx=\int\left[2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\right]dx$

$$=2\cdot\left(\frac{1}{5}\right)^x\frac{1}{\ln\frac{1}{5}}-5\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x\frac{1}{\ln\frac{1}{2}}+C=-\frac{2}{\ln 5}\left(\frac{1}{5}\right)^x+\frac{5}{\ln 2}\left(\frac{1}{2}\right)^x+C$$

25. **解**: $f(x)=\frac{1}{x-a}=\frac{1}{(b-a)+x-b}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{1-\frac{x-b}{a-b}}$

$$=\frac{1}{b-a}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-b}{a-b}\right)^n=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-b)^n}{(a-b)^{n+1}}$$

26. **解**:如图所示



$$原式=\iint\limits_D xe^y\,\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D x^2y^2\,\mathrm{d}\sigma=0+\iint\limits_D x^2y^2\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=2\int_0^1\mathrm{d}y\int_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}x^2y^2\,\mathrm{d}x$$

$$=2\int_0^1\frac{1}{3}x^3y^2\Big|_{\frac{\sqrt{y}}{2}}^{\sqrt{y}}\mathrm{d}y=\frac{2}{3}\int_0^1\left(y^{\frac{7}{2}}-\frac{1}{8}y^{\frac{7}{2}}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{2}{3}\int_0^1\frac{7}{8}y^{\frac{7}{2}}\mathrm{d}y=\frac{14}{24}\cdot\frac{2}{9}y^{\frac{9}{2}}\Big|_0^1=\frac{7}{54}$$

27. **解**:特征方程为 $r^2-6r+9=0$

$r_1=r_2=3$

∴　对应齐次方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}$

由于方程非齐次项为 $f(x)=(x+1)e^{3x}$

∴ 有特解　$y^*=(Ax+B)x^2e^{3x}$,代入原方程

$A=\frac{1}{6},B=\frac{1}{2}$,

∴ 方程的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^{3x}+(\frac{x}{6}+\frac{1}{2})x^2e^{3x}$

28. **证明**:$\frac{\partial z}{\partial x}=y+e^{\frac{y}{x}}+xe^{\frac{y}{x}}\cdot\left(-\frac{y}{x^2}\right)=y+e^{\frac{y}{x}}-\frac{y}{x}e^{\frac{y}{x}}$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=x+xe^{\frac{y}{x}}\cdot\frac{1}{x}=x+e^{\frac{y}{x}}$$

$$\therefore x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=xy+xe^{\frac{y}{x}}-ye^{\frac{y}{x}}+xy+ye^{\frac{y}{x}}=xy+xy+xe^{\frac{y}{x}}=xy+z$$