

2017 年成人高等学校专升本招生全国统一考试

高等数学（二）

第 I 卷（选择题，共 40 分）

一、选择题(1~10 小题。每小题 4 分，共 40 分。在每小题给出的四个选项中。只有一项是符合题目要求的)

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时，下列各无穷小量中与 x^2 等价的是 ()

- A. $x \sin^2 x$ B. $x \cos^2 x$ C. $x \sin x$ D. $x \cos x$

2. 下列函数中，在 $x=0$ 处不可导的是 ()

- A. $y = \sqrt[3]{x^5}$ B. $y = \sqrt[5]{x^3}$ C. $y = \sin x$ D. $y = x^2$

3. 函数 $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ 的单调递减区间是 ()

- A. $(-\infty, -1)$ B. $(-1, 0)$ C. $(0, 1)$ D. $(1, +\infty)$

4. 曲线 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ 的凸区间是 ()

- A. $(-\infty, 1)$ B. $(-\infty, -2)$ C. $(1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

5. 曲线 $y = e^{2x} - 4x$ 在点 $(0, 1)$ 处的切线方程是 ()

- A. $2x - y - 1 = 0$ B. $2x + y - 1 = 0$

- C. $2x - y + 1 = 0$ D. $2x + y + 1 = 0$

6. $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} dx = ()$

- A. $\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

- B. $-\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

- C. $\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

- D. $-\frac{2}{5}\sqrt{x^5} + C$

7. $\int_0^1 2^x dx = ()$

- A. $\ln 2$

- B. $2\ln 2$

- C. $\frac{1}{\ln 2}$

- D. $\frac{2}{\ln 2}$

8. 设二元函数 $z = e^{x^2+y}$, 则下列各式中正确的是 ()

A. $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2}$

B. $\frac{\partial z}{\partial y} = e^y$

C. $\frac{\partial z}{\partial x} = e^{x^2+y}$

D. $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y}$

9. 二元函数 $z = x^2 + y^2 - 3x - 2y$ 的驻点坐标是 ()

A. $\left(-\frac{3}{2}, -1\right)$

B. $\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$

C. $\left(\frac{3}{2}, -1\right)$

D. $\left(\frac{3}{2}, 1\right)$

10. 甲、乙两人各自独立射击 1 次, 甲射中目标的概率为 0.8, 乙射中目标的概率为 0.9, 则至少有一人射中目标的概率为 ()

A. 0.98 B. 0.9 C. 0.8 D. 0.72

第 II 卷 (非选择题, 共 110 分)

二、填空题: 11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。将答案填写在答题卡相应题号后。

11. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + x^2 - 2}{4x^2 + 5x - 8} = \underline{\hspace{2cm}}$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(3x+1)} = \underline{\hspace{2cm}}$

13. 曲线 $y = \frac{x+1}{(x-1)^2}$ 的铅直渐近线方程是 $\underline{\hspace{2cm}}$

14. 设函数 $f(x) = \sin(1-x)$, 则 $f''(1) = \underline{\hspace{2cm}}$

15. $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = \underline{\hspace{2cm}}$

16. $\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

17. 若 $\tan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 则 $\int f(x)dx =$ _____

18. 由曲线 $y = x^3$, 直线 $x = 1$, x 轴围成的平面有界区域的面积为 _____

19. 设二元函数 $z = x^4 \sin y$, 则 $dz \Big|_{\left(1, \frac{\pi}{4}\right)} =$ _____

20. 设 $y = y(x)$ 是由方程 $e^y = x + y$ 所确定的隐函数, 则 $\frac{dy}{dx} =$ _____

三、解答题: 21~28 题, 共 70 分。解答应写出推理、演算步骤, 并将其写在答题卡相应题号后

21. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$

22. 已知函数 $f(x) = \cos(2x+1)$, 求 $f'''(0)$

23. 计算 $\int \frac{1}{3(1+\sqrt[3]{x})} dx$

24. 计算 $\int_0^1 x \arctan x dx$

25. 设离散型随机变量 X 的概率分布为

X	0	1	2
P	0.3	0.4	0.3

求 X 的数学期望 $E(X)$ 及方差 $D(X)$

26. 已知函数 $f(x) = x^4 - 4x + 1$

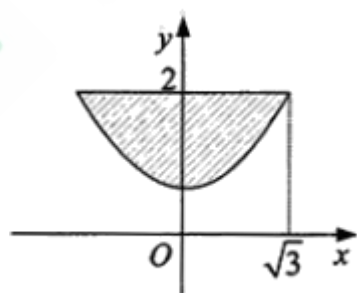
(1) 求 $f(x)$ 的单调区间和极值

(2) 求曲线 $y = f(x)$ 的凹凸区间

27. 记曲线 $y = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}$ 与直线 $y = 2$ ，所围成的平面图形为 D （如图中阴影部分所示）。

(1) 求 D 的面积 S ；

(2) 求 D 绕 y 轴旋转一周所得旋转体的体积 V



28. 设 $z = \frac{u}{v}$, 其中 $u = x^2y$, $v = x + y^2$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 及 dz

2017 年成人高等学校专升本招生全国统一考试

高等数学（二）试题答案解析

1. 【答案】C

【解析】无穷小量等价，那么他们比值的极限为 1

因为 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{x \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$ ，所以 $x \sin x$ 与 x^2 等价

2. 【答案】B

【解析】B 选项，在 $x=0$ 处 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^{\frac{3}{5}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^{\frac{2}{5}}} = +\infty$ ，导数为

无穷大，所以 $y = \sqrt[3]{x^3}$ 在 $x=0$ 不可导

3. 【答案】A

【解析】可导函数单调递减区间导数值小于 0， $f(x) = \ln(x^2 + 2x + 2)$ ，

$f'(x) = \frac{2x+2}{x^2+2x+2} = \frac{2x+2}{(x+1)^2+1} < 0$ ，解出 $x < -1$ ，所以单调递减区间为

$(-\infty, -1)$

4. 【答案】A

【解析】凸函数的二阶导数小于 0，已知 $y = x^3 - 3x^2 - 1$ ， $y' = 3x^2 - 6x$ ，

$y'' = 6x - 6$ ，令 $y'' = 6x - 6 < 0$ ，解出 $x < 1$ ，所以函数凸区间为 $(-\infty, 1)$

5. 【答案】B

【解析】函数在某点的切线的斜率是该点的导数，斜率

$k = y'|_{x=0} = (2e^{2x} - 4)|_{x=0} = -2$ ，所以切线方程为 $2x + y - 1 = 0$

6. 【答案】B

【解析】 $\int \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

7. 【答案】C

【解析】 $\int_0^1 2^x dx = \frac{1}{\ln 2} 2^x \Big|_0^1 = \frac{1}{\ln 2}$

8. 【答案】D

【解析】 $z = e^{x^2+y}$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = 2xe^{x^2+y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = e^{x^2+y}$

9. 【答案】D

【解析】二元函数的驻点是一阶偏导数为0的点, 即

$$\begin{cases} \frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 3 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 2 = 0 \end{cases}, \text{解出} \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ y = 1 \end{cases}, \text{所以驻点为} \left(\frac{3}{2}, 1\right)$$

10. 【答案】A

【解析】设甲射中为事件A, 乙射中为事件B

解法一: 至少一人射中那么就表示甲射中乙不射中, 乙射中甲不射中,

甲乙都射中, 即 $P = P(\bar{A}\bar{B} + \bar{A}B + AB) = P(\bar{A}\bar{B}) + P(\bar{A}B) + P(AB)$

$$= 0.8 \times (1 - 0.9) + (1 - 0.8) \times 0.9 + 0.8 \times 0.9 = 0.98$$

解法二: 至少一人射中的否定是甲、乙没有一个射中, 即

$$P = 1 - P(\bar{A}\bar{B}) = 1 - (1 - 0.8) \times (1 - 0.9) = 1 - 0.02 = 0.98$$

11. 【答案】2

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^4 + x^2 - 2}{4x^2 + 5x - 8} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3 + 1 - 2}{4 + 5 - 8} = 2$

12. 【答案】 $\frac{1}{3}$

【解析】当 $x \rightarrow 0$, 分子分母都为0, 可以使用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(3x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{3}}{3x+1} = \frac{1}{3}$$

13. 【答案】 $x=0$

【解析】函数铅直渐近线可能出现在无穷处或者函数不连续处且极限值为 ∞ ，当 $x \rightarrow \infty$ 时， $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{(x-1)^2}$ 洛必达法则 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{2} \neq \infty$ （排除）

当 $x \rightarrow 1$ 时， $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x-1)^2}$ 洛必达法则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{2(x-1)} = \frac{1}{2} = \infty$

14. 【答案】 0

【解析】 $f'(x) = \cos(1-x)(1-x)' = -\cos(1-x)$ ， $f''(x) = \sin(1-x)(1-x)' = -\sin(1-x)$ ，则 $f''(1) = 0$

15. 【答案】 $-\frac{1}{3}$

【解析】 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x dx = \frac{1}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x d(3x) = \frac{1}{3} \sin 3x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}$

16. 【答案】 1

【解析】 $\int_{-1}^{+\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_{-1}^b x^{-2} dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} -x^{-1} \Big|_{-1}^b = \lim_{b \rightarrow +\infty} -\left(\frac{1}{b} - 1\right) = 1$

17. 【答案】 $\tan x + C$

【解析】若 $\tan x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，则 $\int f(x) dx = \tan x + C$

18. 【答案】 $\frac{1}{4}$

【解析】所围成区域 x 取值范围是 $(0, 1)$ ， $S = \int_0^1 x^3 dx = \frac{1}{4}$

19. 【答案】 $2\sqrt{2}dx = \frac{\sqrt{2}}{2}dy$

【解析】 $dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy$ ， $\frac{\partial z}{\partial x} = 4x^3 \sin y$ ， $\frac{\partial z}{\partial y} = x^4 \cos y$ ，

$$dz \Big|_{\left(1, \frac{\pi}{4}\right)} = 2\sqrt{2}dx + \frac{\sqrt{2}}{2}dy$$

20. 【答案】 $\frac{1}{e^y - 1}$

【解析】方程 $e^y = x + y$ 两端同时对 x 求导 $e^y \frac{dy}{dx} = 1 + \frac{dy}{dx}$, 解出 $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{e^y - 1}$

21. 【答案】

解法一：当 $x \rightarrow 0$ 时，分子分母都为零，可以使用洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x + x \cos x}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x + \cos x - x \sin x}{\cos x} = 2$$

解法二：当 $x \rightarrow 0$ 时， $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2$, $\sin x = x$, $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2$

22. 【答案】

$$f(x) = \cos(2x+1), \quad f'(x) = -2\sin(2x+1), \quad f''(x) = -4\cos(2x+1),$$

$$f'''(x) = 8\sin(2x+1), \quad \therefore f'''(0) = 8\sin 1$$

23. 【答案】

$$\begin{aligned} & \int \frac{1}{3(1+\sqrt[3]{x})} dx, \text{ 令 } \sqrt[3]{x} = t, \int \frac{1}{3(1+t)} 3t^2 dt = \int \frac{t^2}{1+t} dt = \int \frac{t^2-1+1}{1+t} dt = \int (t-1) dt + \int \frac{1}{1+t} dt \\ & = \frac{1}{2}t^2 - t + \ln(1+t), \text{ 即 } \int \frac{1}{3(1+\sqrt[3]{x})} dx = \frac{1}{2}\sqrt[3]{x^2} - \sqrt[3]{x} + \ln(1+\sqrt[3]{x}) + C \end{aligned}$$

24. 【答案】分部积分公式 $\int u dv = uv - \int v du$

$$\int_0^1 x \arctan x dx = \int_0^1 \arctan x d\left(\frac{x^2}{2}\right) = \frac{x^2}{2} \arctan x \Big|_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 x^2 d(\arctan x)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2+1-1}{x^2+1} dx \\ & = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} \int_0^1 dx - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{1}{x^2+1} dx \\ & = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \arctan x \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

25. 【答案】

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 = 1$$

$$E(X^2) = 0 \times 0.3 + 1 \times 0.4 + 2^2 \times 0.3 = 1.6$$

$$Dx = E(X^2) - E^2 X = 1.6 - 1 = 0.6$$

26. 【答案】

(1) 函数 $f(x) = x^4 - 4x + 1$, 则 $f'(x) = 4x^3 - 4$

令 $f'(x) < 0$, 解出 $x < 1$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递减区间为 $(-\infty, 1)$

令 $f'(x) > 0$, 解出 $x > 1$, 所以函数 $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$

函数在 $x = 1$ 处取得极小值为 $f(1) = 1 - 4 + 1 = -2$

(2) $f''(x) = 12x^2$, 则 $f''(x) \geq 0$, 多以函数在 $\mathbb{R}$ 上为凹函数。

27. 【答案】

$$(1) S = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left[2 - \left(\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2} \right) \right] dx = 2 \int_0^{\sqrt{3}} \left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2} \right) dx = 2\sqrt{3}$$

$$(2) V = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 f^2(y) dy = \pi \int_{\frac{1}{2}}^2 (2y - 1) dy = \pi \left(y^2 - y \right) \Big|_{\frac{1}{2}}^2 = \frac{9}{4} \pi$$

28. 【答案】

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{x+y^2} \cdot 2xy - \frac{x^2 y}{(x+y^2)^2} = \frac{x^2 y + 2xy^3}{(x+y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{1}{x+y^2} \cdot x^2 - \frac{x^2 y}{(x+y^2)^2} = \frac{x^3 - x^2 y^2}{(x+y^2)^2}$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy = \frac{x^2 y + 2xy^3}{(x+y^2)^2} dx + \frac{x^3 - x^2 y^2}{(x+y^2)^2} dy$$