

2017 年成人高等学校专升本招生全国统一考试

高等数学（一）

一、选择题：每小题 4 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求。

1. 当 $x \rightarrow 0$ 时，下列变量是无穷小量的为（ ）

- A. $\frac{1}{x^2}$ B. 2^x C. $\sin x$ D. $\ln(x+e)$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x =$ （ ）

- A. e B. e^{-1} C. e^2 D. e^{-2}

3. 若函数 $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-x}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$ ，在 $x=0$ 处连续，则常数 $a =$ （ ）

- A. 0 B. $\frac{1}{2}$ C. 1 D. 2

4. 设函数 $f(x) = x \ln x$ ，则 $f'(e) =$ （ ）

- A. -1 B. 0 C. 1 D. 2

5. 函数 $f(x) = x^3 - 3x$ 的极小值为（ ）

- A. -2 B. 0 C. 2 D. 4

6. 方程 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1$ 表示的二次曲面是（ ）

- A. 圆锥面 B. 旋转抛物面 C. 球面 D. 椭球面

7. 若 $\int_0^1 (2x+k)dx = 1$ ，则常数 $k =$ （ ）

- A. -2 B. -1 C. 0 D. 1

8. 设函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续且 $f(x) > 0$ ，则（ ）

- A. $\int_a^b f(x)dx > 0$ B. $\int_a^b f(x)dx < 0$

C. $\int_a^b f(x)dx=0$ D. $\int_a^b f(x)dx$ 的符号无法确定

9. 空间直线 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$ 的方向向量可取为 ()

A. $(3, -1, 2)$ B. $(1, -2, 3)$ C. $(1, 1, -1)$ D. $(1, -1, -1)$

10. 一直 a 为常数, 则幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+a^2}$ ()

A. 发散 B. 条件收敛 C. 绝对收敛 D. 敛散性与 a 的取值有关

二、填空题: 11~20 小题, 每小题 4 分, 共 40 分。将答案填写在答题卡相应题号后。

11. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = \underline{\hspace{2cm}}$

12. 曲线 $y = \frac{x+1}{2x+1}$ 的水平渐进方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$

13. 若函数 $f(x)$ 满足 $f'(1)=2$, 则 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = \underline{\hspace{2cm}}$

14. 设函数 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, 则 $f'(x) = \underline{\hspace{2cm}}$

15. $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = \underline{\hspace{2cm}}$

16. $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \underline{\hspace{2cm}}$

17. 一直曲线 $y = x^2 + x - 2$ 的切线 l 斜率为 3, 则 l 的方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$

18. 设二元函数 $z = \ln(x^2 + y)$, 则 $\frac{\partial z}{\partial x} = \underline{\hspace{2cm}}$

19. 设 $f(x)$ 为连续函数, 则 $\left(\int_0^x f(t) dt \right)' = \underline{\hspace{2cm}}$

20. 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ 的收敛半径为 $\underline{\hspace{2cm}}$

三、解答题: 21~28 题, 共 70 分, 接答应写出推理、演算步骤

21. 求 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2}$

22. 设 $\begin{cases} x=1+t^2 \\ y=1+t^3 \end{cases}$, 求 $\frac{dy}{dx}$

23. 已知 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数, 求 $\int xf'(x)dx$

24. 计算 $\int_0^4 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$

25. 设二元函数 $z = x^2y^2 + x - y + 1$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 及 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

26. 计算二重积分 $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dxdy$, 其中区域 $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 4\}$

27. 求微分方程 $y \frac{dy}{dx} = x^2$ 的通解

28. 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形有盖桶，证明当圆柱的高等于底面直径时，所使用的铁皮面积最小

2017 年成人高等学校专升本招生全国统一考试

高等数学（一）试题答案解析

1. 【答案】C

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin x = \sin 0 = 0$

2. 【答案】C

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2} \cdot 2} = e^2$

3. 【答案】B

【解析】因为函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，则 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} e^{-x} = a = f(0) = \frac{1}{2}$

4. 【答案】D

【解析】因为 $f'(x) = \ln x + x(\ln x)' = \ln x + 1$ ，所以 $f'(e) = \ln e + 1 = 2$

5. 【答案】A

【解析】因为 $f'(x) = 3x^2 - 3$ ，令 $f'(x) = 0$ ，得驻点 $x_1 = -1$ ， $x_2 = 1$ ，又 $f''(x) = 6x$
 $f''(-1) = -6 < 0$ ， $f''(1) = 6 > 0$ ，所以 $f(x)$ 在 $x_2 = 1$ 处取得极小值，且极小值
 $f(1) = 1 - 3 = -2$

6. 【答案】D

【解析】可将原方程化为 $x^2 + \frac{y^2}{\frac{1}{2}} + \frac{z^2}{\frac{1}{3}} = 1$ ，所以原方程表示的是椭球面。

7. 【答案】C

【解析】 $\int_0^1 (2x + k) dx = (x^2 + kx) \Big|_0^1 = 1 + k = 1$ ，所以 $k = 0$

8. 【答案】A

【解析】若在区间 $[a, b]$ 上 $f(x) > 0$ ，则定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 的值为由曲线

$y=f(x)$, 直线 $x=a$, $x=b$, $y=0$ 所围成图形的面积, 所以 $\int_a^b f(x)dx > 0$

9. 【答案】A

【解析】因为直线方程为 $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{2}$, 所以其方向向量为 $(3, -1, 2)$

10. 【答案】B

【解析】 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n = (-1)^n \frac{1}{n+a^2} \rightarrow 0$. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| (-1)^n \frac{1}{n+a^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+a^2}$,

因为 $\frac{1}{n+a^2} \leq \frac{1}{n}$, 而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+a^2} \right|$ 发散。由莱布尼茨判别法

知, $v_n = \frac{1}{n+a^2} > v_{n+1} = \frac{1}{n+1+a^2}$, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} v_n = 0$, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n v_n$ 收敛。故 $\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n+a^2} \right|$

条件收敛。

11. 【答案】1

【解析】 $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sin(x-2)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sin(x-2)}{x-2}} = 1$

12. 【答案】 $y = \frac{1}{2}$

【解析】 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{2+\frac{1}{x}} = \frac{1}{2}$

13. 【答案】1

【解析】 $f'(1) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = 2$ 。

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x^2-1} = \lim_{x \rightarrow 1} \left[\frac{f(x)-f(1)}{x-1} \cdot \frac{1}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)-f(1)}{x-1} \cdot \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{x+1} = 2 \times \frac{1}{2} = 1$

14. 【答案】 $1 + \frac{1}{x^2}$

【解析】因为 $f(x) = x - \frac{1}{x}$, $f'(x) = x' - \left(\frac{1}{x} \right)' = 1 + \frac{1}{x^2}$

15. 【答案】 2

【解析】 $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x) dx = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin x dx + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 0 + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx = 2 \sin x \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = 2$

16. 【答案】 $\frac{\pi}{2}$

【解析】 $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x \Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2}$

17. 【答案】 $3x - y - 3 = 0$

【解析】 曲线上某一点的切线斜率为 $k = y' = 2x + 1$ ，因为该切线的斜率为 3，则 $k = 2x + 1 = 3$ ， $x = 1$ ， $y|_{x=1} = 0$ ，即切线过点 $(1, 0)$ ，所求切线为 $y = 3(x - 1)$ ，即 $3x - y - 3 = 0$

18. 【答案】 $\frac{2x}{x^2 + y}$

【解析】 $z = \ln(x^2 + y)$ ， $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(x^2)'}{x^2 + y} = \frac{2x}{x^2 + y}$

19. 【答案】 $f(x)$

【解析】 $\left(\int_0^x f(t) dt \right)' = f(x)$

20. 【答案】 3

【解析】 $\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{3^{n+1}} = \frac{1}{3}$ ，故幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3^n}$ 的收敛半径 $R = \frac{1}{\rho} = 3$

21. 【答案】 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \sin x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - \cos x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + \sin x}{2} = \frac{1}{2}$

22. 【答案】 $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$

23. 【答案】 因为 $\sin x$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以

$$\int x f'(x) dx = x f(x) - \int f(x) dx = x f(x) - \sin x + C$$

24. 【答案】 设 $\sqrt{x}=t$, 则 $x=t^2, dx=2tdt, 0 \leq t \leq 2$

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx &= \int_0^2 \frac{2t}{1+t} dt \\&= 2 \int_0^2 \left(1 - \frac{1}{1+t}\right) dt \\&= 2 \left[t \Big|_0^2 - \ln(1+t) \Big|_0^2 \right] \\&= 2 \times (2 - \ln 3) \\&= 4 - 2 \ln 3\end{aligned}$$

25. 【答案】 因为 $z = x^2 y^2 + x - y + 1$, 所以

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 y - 1$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy^2 + 1$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 4xy$$

26. 【答案】 D 可表示为 $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 2$

$$\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \iint_D r \cdot r dr d\theta = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 r^2 dr = 2\pi \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^2 = \frac{16}{3} \pi$$

27. 【答案】 $y \frac{dy}{dx} = x^2$

$$y dy = x^2 dx$$

$$\text{两边同时积分。} \quad \frac{1}{2} y^2 = \frac{1}{3} x^3 + C_1$$

$$3y^2 = 2x^3 + C_1$$

$$\text{即 } y^2 = \frac{2}{3} x^3 + C$$

28. 【答案】 设圆柱形的底面半径为 r , 高为 h , 则 $V = \pi r^2 h$

$$\text{所用铁皮面积 } S = 2\pi r^2 + 2\pi r h ,$$

$$\text{令 } \frac{dS}{dr} = 4\pi r - 2\pi h = 0$$

$$2r = h$$

$$\frac{d^2S}{dr^2} = 4\pi > 0$$

于是由实际问题得， S 存在最小值，即当圆柱的高等于底面直径时，所使用的铁皮面积最小